Riporto quì la soluzione dell'esercizio che il 24 novembre 2004 non ho finito durante la lezione. L'esercizio consisteva nel trovare la soluzione dell'equazione differenziale

$\begin{cases} y'' + a^2 y = \cos(\omega t) \\ y(0) = y_o, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$. Passando a trasformata di Laplace si ottiene $\mathcal{L}(y) = \dfrac{p^3 y_o + p(1+\omega y_o)}{(p^2+a^2)(p^2+\omega^2)}$. Quindi $y(t) = V.P. \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{a_o - i\infty}^{a_o + i\infty} dp \ e^{pt} \dfrac{p^3 y_o + p(1+\omega y_o)}{(p^2+a^2)(p^2+\omega^2)}$. Prendiamo $a_o > 0$ e per il Lemma di Jordan, detta $Q(p) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{p^3 y_o + p(1+\omega y_o)}{(p^2+a^2)(p^2+\omega^2)}$, si ha $y(t) = Res(Q(i\omega)) + Res(Q(-i\omega)) + Res(Q(ia)) + Res(Q(-ia))$.

$$ResQ(i\omega) = e^{i\omega t} \frac{y_o(i\omega)^3 + i\omega(1+\omega^2 y_o)}{2i\omega(a^2-\omega^2)} \quad ResQ(-i\omega) = e^{-i\omega t} \frac{y_o(-i\omega)^3 - i\omega(1+\omega^2 y_o)}{(-2i\omega)(a^2-\omega^2)}$$

$$ResQ(ia) = e^{iat} \frac{y_o(ia)^3 + ia(1+\omega^2 y_o)}{2ia(-a^2+\omega^2)} \quad ResQ(-i\omega) = e^{-i\omega t} \frac{y_o(-ia)^3 - ia(1+\omega^2 y_o)}{(-2i\omega)(-a^2+\omega^2)}$$

Sommando si ottiene $y(t) = (y_o \cos(\omega t) + \dfrac{1}{\omega^2 - a^2}(\cos(at) - \cos(\omega t)))H(t)$. Si può notare che la funzione soddisfa l'equazione differenziale (condizioni iniziali comprese) per $t \geq 0$.

Un'altra cosa da notare è che $y(t)$ è scritta come $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ dove $y_1(t) y_o \cos at H(t)$ e $y_2(t) = \dfrac{1}{\omega^2 - a^2}(\cos(at) - \cos(\omega t))H(t)$ e $y_1(t)$ soddisfa l'equazione $\begin{cases} y'' + a^2 y = 0 \\ y(0) = y_o, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$ mentre $y_2(t)$ soddisfa

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = \cos(\omega t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Questo significa che la soluzione avrebbe potuto essere trovata pure secondo la procedura: 1) si trova la soluzione della equazione omogenea associata con le stesse condizioni iniziali, 2) si trova la soluzione della non omogenea associata ma con condizioni iniziali nulle. In ambedue i casi si può usare la trasformata di Laplace. A volte è più semplice risolvere il punto 1) ricordando di come si risolve una equazione lineare a coefficienti costanti. Il punto 2) è in generale più semplice che usare la trasformata di Laplace nel caso di equazione con condizioni non nulle.
È un fatto generale che la soluzione di una equazione differenziale LINEARE è data dalla somma della soluzione della equazione OMOGENEA CON LE STESSE CONDIZIONI INIZIALI e della soluzione della non omogenea CON CONDIZIONI INIZIALI NULLE.